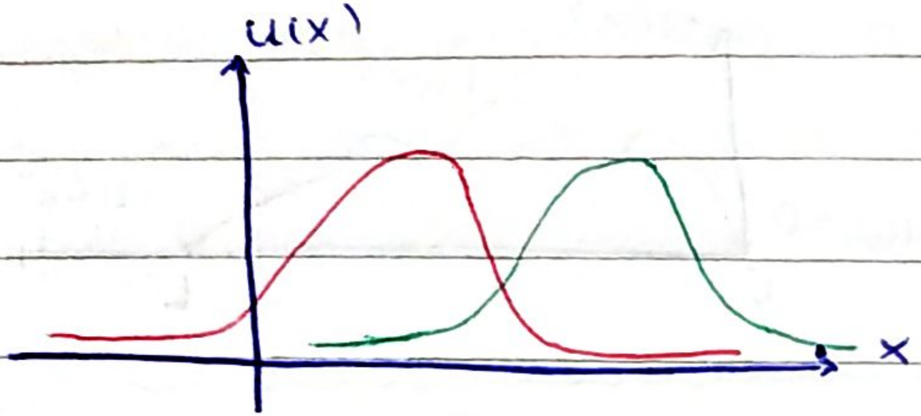
$\boxed{3/12/19}$

$\nabla^2 T = 0$, Laplace

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, ελλειπτικού τύπου, ΜΔΕ,

γραμμ., ομογενής

Σ.Σ.



soliton wave
(μοναχικό κύμα)

$\frac{\partial u}{\partial t} + a u \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$, kdV

παραβ. τύπου ΜΔΕ, 3ης τάξης

ΠΑΡΑΔ.: (από προηγούμενο μάθημα)

Π.Σ.Τ.: $\begin{cases} Au(x) = -\dfrac{d^2}{dx^2}u(x) = \lambda u(x) \\ \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$

Θέτω: $u(x) = e^{px}$: χαρακτ. πολ/μο

$$p^2 + \lambda = 0$$

• $\boxed{\lambda > 0}$: $u(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$u(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$u(L) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) = 0 \Rightarrow A\sin(\sqrt{\lambda}x) = 0$

$\Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}x) = \sin n\pi x$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}}$,

άρα $u(x) = A\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$

A: ζητάμε το $\langle u|u\rangle = 1 \Rightarrow |A|^2 \displaystyle\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = 1$

$\Rightarrow |A|^2 = \dfrac{2}{L}$

για πραγματικές συναρτήσεις:

$\boxed{u_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)}$, $\lambda > 0$, $n = 1, 2, \ldots$

• $\boxed{\lambda = 0}$: $u(x) = Ax + B$, $\lambda = 0$

$u(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$u(L) = 0 \Rightarrow A = 0$

άρα $\boxed{u(x) = 0}$

• $\boxed{\lambda < 0}$: Οι λύσεις είναι $u(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$u(0) = A + B = 0$

$u(L) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\cdot L} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\cdot L} = 0$

Ομογενές σύστημα: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\cdot L} & e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot L} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot L} - e^{\sqrt{-\lambda}\cdot L} \neq 0$

γιατί είναι Γ.Α., άρα $A = B = 0$

δηλ. $\boxed{u(x) = 0}$

Σ.Σ. : 1) Για την Dirichlet

2) Για την παράγωγο της u, Neumann

3) Μικτές κ. για την παράγωγο, Robin

Π.χ. $a u(x) + b \frac{du}{dx} = \gamma$, $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$

ΠΑΡΑΔ. Τελεστών :

1) Ερμιτιανοί , $A = A^+$

Συμβολ. : H

2) Αντι-ερμιτιανοί , $A = -A^+$

3) Μοναδικοί - Μοναδιαίοι , $A^+ = A^{-1}$

Συμβολ. : U

$\rightarrow \langle uf | ug \rangle = \langle g | u^+ u f \rangle = \langle g | u^{-1} u f \rangle = \langle g | f \rangle$

διατηρούν τα μήκη των διανυσμάτων (ισομετρική)

4) Ένας τελεστής λέγεται κανονικός : $AA^+ = A^+A$

5) Προβολικοί Τελεστές : P

a) είναι αυτοπροσαρτημένος

b) $P^2 = P$

Π.χ. Έστω $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (x, y, 0)$: ορθογώνια προβολή στο xy-επίπεδο

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Είναι :

$$P^2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^2 = P$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν A κανονικός τελεστής ($AA^+ = A^+A$) κ. $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $A|f\rangle = \lambda|f\rangle \Rightarrow A^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle$.

Δηλ. ο A^+ έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με του A κ. συζυγείς ιδιοτιμές.

ΑΠΟΔ.:

Θεωρούμε $C = A - \lambda I$, τότε $C^+ = A^+ - \lambda^+ I$.

Ο A είναι κανονικός, τότε κ. ο C θα είναι κανονικό

$$CC^+|f\rangle = (A-\lambda I)(A^+ - \lambda^* I)$$
$$= (A-\lambda I)(A^+|f\rangle - \lambda^*|f\rangle)$$
$$= AA^+|f\rangle - \lambda^* A|f\rangle - \lambda A^+|f\rangle + \underbrace{\lambda\lambda^*}_{\lambda^2}|f\rangle \quad (1)$$

Θ.ν.δ.ο. $CC^+ = C^+C$

$$C^+C|f\rangle = (A^* - \lambda^* I)(A - \lambda I)|f\rangle$$
$$= (A^+ - \lambda^* I)(A|f\rangle - \lambda|f\rangle)$$
$$= A^+A|f\rangle - \lambda A^+|f\rangle - \lambda^* A|f\rangle + |\lambda|^2|f\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (2)$$

αφού $AA^+ = A^+A$ τότε (1), (2) $\rightarrow CC^+ = C^+C$

$C|f\rangle = 0$ γιατί $C|f\rangle = (A - \lambda I)|f\rangle = 0$

$\Rightarrow A|f\rangle - \lambda|f\rangle = 0 \Rightarrow A|f\rangle = \lambda|f\rangle$

όμως $C|f\rangle = 0$, τότε $\langle Cf|Cf\rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle Cf|Cf\rangle = \langle f|C^*Cf\rangle$$
$$= \langle f|CC^+f\rangle = \langle C^+f|C^+f\rangle = 0$$
$$\Rightarrow C^+|f\rangle = 0$$
$$\Rightarrow (A^+ - \lambda^* I)|f\rangle = 0$$
$$\Rightarrow A^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle$$

Παρατηρήσεις: (α) Αν H ερμιτιανός τελεστής τότε οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές

Απόδ.: H κανονικός, $HH^+ = H^+H$

$$\left\{\begin{array}{l} H|f\rangle = \lambda|f\rangle \\ H^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle \end{array}\right\} \text{ όμως } H = H^+$$

$$H|f\rangle = \lambda|f\rangle = H^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle$$
$$\Rightarrow \lambda|f\rangle = \lambda^*|f\rangle \Rightarrow \lambda = \lambda^*, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(β) Αν ο τελεστής είναι αντι-ερμητιανός, οι ιδιοτιμές του είναι φανταστικές

(γ) Αν είναι μοναδικός, τότε οι ιδιοτιμές έχουν μέτρο μονάδα

Αποδ. $U|f\rangle = \lambda|f\rangle$

$U^*|f\rangle = \lambda^*|f\rangle \Rightarrow \lambda U^+|f\rangle = \lambda\lambda^*|f\rangle = |\lambda|^2|f\rangle$

$\Rightarrow U^+\lambda|f\rangle = |\lambda|^2|f\rangle$

$\Rightarrow U^+U|f\rangle = |\lambda|^2|f\rangle \Rightarrow I\cdot|f\rangle = |\lambda|^2|f\rangle$

$\Rightarrow |f\rangle = |\lambda|^2\cdot|f\rangle \Rightarrow |\lambda|^2 = 1$

ΑΣΚΗΣΗ: Να εξετάσετε αν ο $A = \int_0^x dt$ είναι αυτο-προσαρτημένος, $x \in [a,b]$

ΛΥΣΗ:

$\langle g|A^+f\rangle = \langle Ag|f\rangle$

$$= \int_a^b \Big(\underbrace{\int_0^x g(t)dt}_{G(x)}\Big)^* f(x)dx = \Big(\int_a^b G(x)f^*(x)dx\Big)^*$$

$$\int_a^b G(x)f^*(x)dx = G(x)f^*(x)\Big|_a^b - \int_a^b G'(x)F^*(x)dx =$$

όπου $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

$$= \big(G(b)f^*(b) - G(a)f^*(a)\big) - \int_a^b g(x)\cdot\Big(\underbrace{\int_a^b f^*(t)dt}_{Af^*(x)}\Big)dx$$

$$= \underbrace{\big(G(b)f^*(b) - G(a)f^*(a)\big)}_{\text{αν } G(b)f^*(b) = G(a)f^*(a)} + \underbrace{\int_a^b g(x)(-Af^*(x))dx}_{\langle g|A^+f\rangle}$$

όπου $A^+ = -\int_0^x dt$

Συστήματα Sturm - Liouville

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b w(x) f^*(x) g(x)\, dx \quad , \quad w(x): \text{συν/ση βάρους}$$

Θεωρούμε τη Δ.Ε.: $Lu = \lambda u = a(x)\frac{d^2}{dx^2} + \beta(x)\frac{d}{dx} + \gamma(x)$

Πραγματικοί τελεστές

Ζητάμε τον προσαρτημένο του L, τότε:

$$\langle g | Lf \rangle = \int_a^b w(x) g^*(x) L f(x)\, dx$$

$$= \int_a^b w g^* a \frac{d^2 f}{dx^2}\, dx + \int_a^b w g^* \beta \frac{df}{dx}\, dx + \int_a^b w g^* \gamma f\, dx$$

$L|f\rangle = Lf(x)$

$= af'' + \beta f' + \gamma f$

Θέτω $\begin{cases} w_1 = w g^* a \\ w_2 = w g^* \beta \end{cases}$

$$\to \int_a^b w_1 f''\, dx = w_1 f' \Big|_a^b - \int_a^b w_1' f'\, dx$$

$$= \underbrace{w_1 f' \Big|_a^b} - \underbrace{w_1' f \Big|_a^b} + \int_a^b w_1'' f\, dx$$

και $\int_a^b w_2 f'\, dx = \underbrace{w_2 f \Big|_a^b} - \int_a^b w_2' f\, dx$

Δηλ.: $\langle g | Lf \rangle = Q(f,g)\Big|_a^b + \int_a^b (w_1'' f - w_2' f + w g^* \gamma f)\, dx$

$$w_1'' = [(wa)\cdot g^*]'' = (wa)'' g^* + 2(wa)' g^{*\prime} + wa g^{*\prime\prime}$$

$$w_2' = [(w\beta)\cdot g^*]' = (w\beta)' g^* + (w\beta)\cdot g^{*\prime}$$

Ο τελεστής έχει γίνει στο g^*

Τελικά: $\langle g | Lf \rangle = Q(f,g)\Big|_a^b + \int_a^b \left(wa g^{*\prime\prime} f - w\beta g^{*\prime} f + w\gamma g^* f \right) dx$

$$+ \int_a^b \left[(wa)'' g^* + 2(wa)' g^{*\prime} - (w\beta)' g^* \right] f\, dx =$$

$$= Q(f,g)\Big|_a^b + \int_a^b \left(w a g^{*''} f + w \beta g^{*'} f + w \gamma g^{*} f\right) dx$$

$$+ \int_a^b \left[(wa)'' g^{*} + 2(wa)' g^{*'} - (w\beta)' g^{*} - 2(w\beta) g^{*'}\right] f \, dx$$

$$\Rightarrow \langle g | Lf \rangle = Q(f,g)\Big|_a^b + \int_a^b w(x) L g^{*}(x) f(x) \, dx$$

$$+ \int_a^b \left[(wa)'' - (w\beta)'\right] g^{*} f \, dx + \int_a^b 2\left[(wa)' - w\beta\right] g^{*'} dx$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση:

α) $Q(f,g)\Big|_a^b = w_1 f'\Big|_a^b - w_1' f\Big|_a^b + w_2 f\Big|_a^b = 0$

β) $(wa)' - w\beta = 0 \Rightarrow \frac{1}{w} \cdot \frac{d(wa)}{dx} = \beta \quad , \quad w(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \langle g | Lf \rangle = \langle Lg | f \rangle$$

δηλ. ο τελεστής είναι <u>αυτοπροσαρτημένος</u>.

Τότε $w'(a) + w'\beta = w\beta \Rightarrow a w' + (a' - \beta) w = 0 \quad (*)$

Δ.Ε. 1ης τάξης για την $w(x)$.

<u>Επίσης</u>: $L = \frac{1}{w}\left(\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + \gamma(x) w(x)\right)$, $p(x) = a(x) w(x)$

$(*) \longrightarrow \frac{w'}{w} = \frac{\beta - a'}{a} = \frac{\beta}{a} - \frac{a'}{a} \Rightarrow$ Ολοκληρώνω

$$\Rightarrow \ln w = \int \frac{a}{\beta} dx - \ln a \Rightarrow w(x) = \left|\frac{c}{a(x)}\right| \cdot e^{\int \frac{\beta}{a} dx}$$

άρα μπορώ να υπολογίσω τη συν/ση βάρους